7.11.19

משה

אינפי א' - תירגול

תזכורת

אי"ש

1) $x^2-4x+3<0$

$x_{1,2}=1,3$

$1<x<3$

2) $x^2-3x-4\geq 0$

$x_{1,2}=4,-1$

$x\leq -1\ ,\ x\geq 4$

3) 1.1 $-2x^2+x+1\geq 0$

$2x^2-x-1\leq 0$

$x_{1,2}=1,-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$

מערכת אי"ש

$$\begin{cases} x^2-7x+10<0 \\ x^2-10x+21\leq 0 \end{cases}$$ וגם

$x_{1,2}=2,5$

$2<x<5$

$x_{1,2}=3,7$

$3\leq x\leq 7$

$3\leq x<5$

(אם היה "או" אז $2<x\leq 7$).

4) $x^2-8x+12>0$ וגם $x^2-9x-10<0$

$x_{1,2}=\frac{8\pm 4}{2}=6,\ 2$

$x_{1,2}=\frac{9\pm 11}{2}=10,\ -1$

$-1<x<2\ ,\ 6<x<10$

ערך מוחלט

משפטים

1) $|x| \geq 0$ אז $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

2) $|xy| = |x| \cdot |y|$

3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4) $|x| \geq x$

5) $|x|^2 = x^2$

6) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (נקרא: אי״ש המשולש).

הערה

$4 \geq 3$

זה תקין!

כלל

אם $a \geq b \geq 0$

אז $a^2 \geq b^2$

כלל

- $|x| \leq a$

$-a \leq x \leq a$

- $|x| \geq b$

$x \leq -b$ או $x \geq b$

דוגמאות

1) $(a>0)$

$|x| \leq a$

$x^2 \leq a^2$

$x^2 - a^2 \leq 0$

$x = a$ $\quad$ $x = -a$

$-a \leq x \leq a$

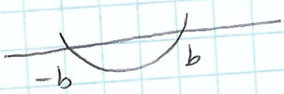
2)

$|x| \geq b$

$x^2 \geq b^2$

$x^2 - b^2 \geq 0$

$x = -b$ $\quad$ $x = b$



$x \leq -b \,,\; x \geq b$

(3

$-5 < x-3 < 7$

$-5 < x-3$ או $x-3 < 7$

(4

$|x^2-5x| \le 6$

$-6 \le x^2-5x$

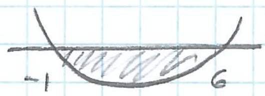
$0 \le x^2-5x+6$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2,\ 3$

$x^2-5x \le 6$

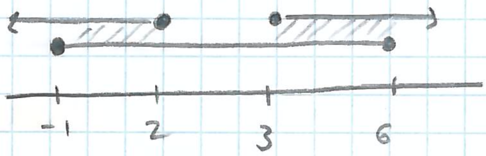
$x^2-5x-6 \le 0$

$x_{1,2} = \frac{+5 \pm 7}{2} = 6,\ -1$



$x \le 2\ ,\ x \ge 3$

$-1 \le x \le 6$



$-1 \le x \le 2\ ,\ 3 \le x \le 6$

(5

$|x^2-13x| > 30$

$x^2-13x < -30$

$x^2-13x+30 < 0$

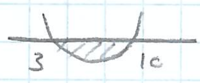
$x_{1,2} = \frac{13 \pm 7}{2} = 10,\ 3$

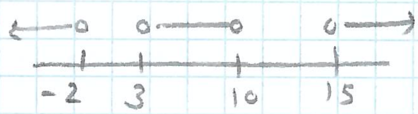
או

$x^2-13x > 30$

$x^2-13x-30 > 0$

$x_{1,2} = \frac{13 \pm 17}{2} = 15,\ -2$





$-2 < x,\ \ 3 < x < 10,\ \ 15 < x$

1) הוכחה

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

העלאה בריבוע

$$|x+y|^2 \le (|x| + |y|)^2$$

פתיחת חזקה

$$(x+y)^2 \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\cdot|y|$$

$$x^2+y^2+2yx \le x^2+y^2+2|xy|$$

צמצום איברים

$$2yx \le 2|xy|$$

$$xy \le |xy|$$

ידוע כי $t \le |t|$

לכן מתקיים השוויון. מש"ל

2) הוכחה

לא בהכרח ח"ב, אסור להעלות בריבוע.

$$|x-y| \ge |x| - |y|$$

$$\cancel{|y| - |x-y| \le |x|}$$

$$|x| = |x+y+y| = |(x+y)+y| \underset{\text{אי"ש משולש}}{\le} |x+y| + |y|$$

העברת אגף.

$$|x| - |y| \le |x+y|$$

מש"ל.

אי"ש הממוצעים

נתון $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ge 0$

אז מתקיים:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

כלל

$a, b \ge 0$ אז $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

הוכחה

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

העלאה בריבוע

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$$

מכנה משותף

$$4ab \le a^2+2ab+b^2$$

העברת אגפים

$$0 \le a^2 - 2ab + b^2$$

כל ריבוע

$$0 \le (a-b)^2$$

מש"ל.

הערה

$$\sqrt{4} = 2$$

$$-\sqrt{4} = -2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

אי שוויון ברנולי

ל $x>0$ מתקיים $(1+x)^n \ge 1+nx$

הוכחה באינדוקציה

עבור $n=1$ $(1+x)^1 \ge 1+1\cdot x$

עבור $n=2$ $(1+x)^2 \ge 1+2x$

$1+x^2+2x \ge 1+2x$

$x^2 \ge 0$

נניח נכון עבור n $(1+x)^n \ge 1+nx$

ונראה נכונות עבור $n+1$

$(1+x)^{n+1} \ge 1+(n+1)x$

פתיחת סוגריים $(1+x)(1+x)^n \ge 1+nx+x$

$(1+x)^n + x(1+x)^n \ge 1+nx+x$

נכון לפי הנחת האינדוקציה

נשאר להוכיח כי

$\cancel{x}(1+x)^n \ge \cancel{x}$ $x>0$

$(1+x)^n \ge 1$

מתקיים

$-1<x<0$

$(1+x)^n \le 1$

אינפי

14.11.19

~~לינארית~~ - תרגול

פונקציה

הגדרה:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציה אם לכל x קיים לכל היותר $f(x)$ אחד.

זאת אומרת, אם קיים x עבורו יש 2 או יותר $f(x)$ אז f לא פונקציה.

דוגמאות:

אלמנטריות:

1) $f(x)=x^2+5x-2$ פולינום, פונקציה

2) $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2+x+1}$ רציונלית, פונקציה

3) $f(x)=2^x$ מעריכית, פונקציה

4) $f(x)=\sin x$ טריגו, פונקציה

5) $f(x)=\pm\sqrt{x}$ לא פונקציה כי $f(1)=\pm 1$

6) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x-2} & x\geq 1\\ \frac{1}{x^2} & x<1\end{cases}$ פונקציה

7) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x-2} & x\geq 1\\ \frac{1}{x^2} & x\leq 1\end{cases}$

$f(1)=\frac{4}{1-2}=-4,\ f(1)=\frac{1}{1}=1$ ולכן לא פונקציה.

8) $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\geq 2\\ 2x^2-x & 1\leq x\leq 2\\ 1 & x\leq 1\end{cases}$

$f(2)=3\cdot 2-1=5$

$f(2)=2\cdot 2^2-2=6$

לא פונקציה

9) $f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 2\\ 2x^2-x & 1\leq x<2\\ 1 & x\leq 1\end{cases}$

$f(1)=2\cdot 1^2-1=1$

$f(1)=1$

לכן פונקציה.

תחום הגדרה של פונקציה

הגדרה

תחום הגדרה של פונקציה f הוא כל x עבורם $f(x)$ קיים.

לדוגמא:

1) $f(x) = x^5 - 4x^2$, ת"ה כל x

2) $f(x) = \frac{1}{2x-7}$, ת"ה $x \neq 3.5$

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$, ת"ה

$x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 5, -1$

ולכן $x \neq +5$, $x \neq -1$

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$, ת"ה

$x^2+x+1 \neq 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

אין פתרון

ולכן ת"ה כל x

5) $f(x) = \sqrt{x+1}$ ת"ה

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

* הערה

אם יש שורשים אי-זוגיים, כל x.
אם יש שורש זוגי,
מה שבתוך השורש
גדול או שווה לאפס.

6) $f(x) = \sqrt{x^2-10x-9}$ ת"ה $x^2-10x-9 \geq 0$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = 9, -1$

$x \geq 9$ או $x \leq -1$

7) $f(x) = \sqrt[4]{-11+12x-x^2}$ ת"ה $-11+12x-x^2 \geq 0$

$x^2-12x+11 \leq 0$

$x=1$, $x=11$

$1 \leq x \leq 11$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ ת"ה כל x.

9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ת"ה $x^2-1>0$

$x=1, x=-1$

$x>1$ ~~[illegible]~~ , $x<-1$

10) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ת"ה $x^2-4 \geq 0$ וגם $9-x^2>0$

$x=\pm 2$

$x=\pm 3$

ת"ה $2 \leq x < 3$ או $-3 < x \leq -2$

חסימות של פונקציה

הגדרה

- הפונקציה f חסומה מלמעלה אם לכל x בתחום ההגדרה קיים m מס' ממשי כך ש $f(x)\le m$
- הפונקציה f חסומה מלמטה אם לכל x בתחום ההגדרה קיים m מס' ממשי כך ש $f(x)\ge m$.

דוגמאות

1) $f(x)=\sin x$
$-1\le \sin x\le 1$

2) $f(x)=\cos x$
$-1\le \cos x\le 1$

3) $f(x)=\sin^2 x$
$0\le \sin^2 x\le 1$

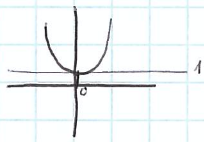
תמונה של פונקציה

הגדרה

תמונה של פונקציה f היא אוסף כל הערכים שאפשר לקבל ע"י הפונקציה.

דוגמאות

1) $f(x)=x^2+1$



התמונה: $y\ge 1$

~~[illegible]~~

$f(x)=ax^2+bx+c$ נקודה קיצון $\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$ עוד דרך למציאת תמונה.

$\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$
מציבים למציאת נק' קיצון.

2) $f(x)=x^2-4x-5$ צוחקת

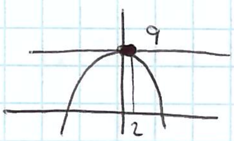
$(2,-9)$ min

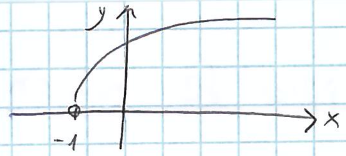
תמונה $y\ge -9$.

3) $f(x)=-x^2+4x+5$ בוכה

$\left(\frac{-4}{-2}, 5-\frac{16}{-4}\right)=(2,9)$ max

תמונה $y\le 9$





4) $f(x)=\sqrt{x+1}$, תמונה $y\geq 0$.

5) $f(x)=7+\sin 5x$

$7-1\leq 7-\sin 5x\leq 1+7$

$6\leq f(x)\leq 8 \leftarrow 6\leq y\leq 8$

6) $f(x)=\dfrac{1}{3-\cos 4x}$

$-1\leq \cos 4x\leq 1$

$-1\leq -\cos 4x\leq 1$

$3-1\leq \cos 4x\leq 1+3$

$2\leq 3-\cos 4x\leq 4$

$\dfrac{1}{4}\leq \dfrac{1}{3-\cos 4x}\leq \dfrac{1}{2}$

הפיכת סימנים כי העברנו לשברים

תרגיל

מצאו את החסם של

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ לכל $x\geq 0$

ת"ה $x+1\neq 0 \rightarrow x\neq -1$

$-1\leq f(x)<1$

פונקציה זוגית

הגדרה

f זוגית אם 1) $f(-x)=f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה.

2) אם קיים x עבורו $f(x)$ $\overset{\text{קיים}}{\text{אבל}}$ $f(-x)$ לא קיים או להפך אז f לא זוגית.

פונקציה אי זוגית

הגדרה

אם $f(-x)=-f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה

אם קיים x עבורו $f(x)$ קיים אבל $f(-x)$ לא קיים או להפך אז f לא אי זוגית.

14.11.19

תרגיל

בדוק אם f זוגית או אי זוגית או כללית.

1) $f(x)=3x^2+7$, ת"ה כל x.

$f(-x)=3(-x)^2+7=3x^2+7=f(x)$, זוגית

~~זוגית~~

2) $f(x)=x^2+x+1$, ת"ה כל x

$f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1$, כללית.

3) $f(x)=x^3-4x$, ת"ה כל x

$f(-x)=(-x)^3-4(-x)=\underset{-(x^3-4x)}{-x^3+4x}=-f(x)$, אי זוגית.

4) $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$, ת"ה $x^2-4x-5\geq 0$

$x=5$ $\quad x=-1$

$x\geq 5$ או $x\leq -1$

ת"ה לא סימטרי, כללית.

5) $f(x)=x^4\cdot\sqrt[5]{x}+\frac{x}{x^2-1}$, ת"ה $x\neq\pm 1$

$f(-x)=(-x)^4\cdot\sqrt[5]{-x}+\frac{-x}{(-x)^2-1}=x^4(-\sqrt[5]{x})-\frac{x}{x^2-1}=$

$=-\left(x^4\cdot\sqrt[5]{x}+\frac{x}{x^2-1}\right)=-f(x)$

אי זוגי.

6) $f(x)=\sin x$, ת"ה כל x

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$

אי זוגית

7) $f(x)=\sin^2 x$, ת"ה כל x

$f(-x)=(\sin(-x))^2=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$

זוגי.

8) $f(x)=\cos x$, ת"ה כל x

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

זוגי

9) ת"ה כל x , $f(x) = \sin x + \cos x$

כללי

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$

10) ת"ה כל x , $f(x) = \sin x - \cos x$

כללית

$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$

להגשה

תרגיל באינפי א' 1#

1. הוכח ש $\sqrt{7}$ הוא מספר לא רציונלי. (כמו בכיתה)

2. הוכח כי האינפימום של A הוא 5.

$$A=\{x \mid x>5\}$$ (כמו בכיתה)

3. מצא עבור הקבוצות הבאות את האינפימום, סופרמום, מינימום ומקסימום (במידה והם קיימים)

א) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{(-1)^n}{n} \quad n\in\mathbb{N}\}$

ב) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x^2<3\}$

ג) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+3x-4\le 0\}$

ד) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x(x^2-4)=0\}$

ה) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x=(-1)^n+\frac{n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\}$

ו) $A=\{1+\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)(-1)^{n+1},\ n\in\mathbb{N}\}$

21.11.19

אינפי א' - תירגול

פונקציה

הגדרה

יהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה.

f נקראת חח"ע אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=x_2$

דוגמאות

1) $f(x)=5x-6$

האם חח"ע?

פתרון

נתון $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל $x_1=x_2$

$$5x_1-\cancel{6}=5x_2-\cancel{6}$$

$$5x_1=5x_2 \quad /:5$$

$$x_1=x_2$$

לכן f חח"ע.

2) $f(x)=x^2-x+2$

האם חח"ע?

פתרון

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1^2-x_1+2=x_2^2-x_2+2$$

$$x_1^2-x_1=x_2^2-x_2$$

כפל מקוצר

$$x_1^2-x_2^2-x_1+x_2=0$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(x_1-x_2)=0$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-1)=0$$

$x_1-x_2=0$ או $x_1+x_2=1$

$x_1=x_2$ או $x_1=1-x_2$

לדוגמא

$x_1=0$

$x_2=1$

$f(0)=2$

$f(1)=2$

אבל

$0\neq 1$

f לא חח"ע

3) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4x+7}$

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$\frac{2x_1-3}{4x_1+7}=\frac{2x_2-3}{4x_2+7}$$

$$\cancel{8x_1x_2}-12x_2+14x_1-\cancel{21}=\cancel{8x_1x_2}-12x_1+14x_2-\cancel{21}$$

$$-12x_2-14x_2=-12x_1-14x_1$$

$$-26x_2=-26x_1$$

$$x_2=x_1$$

f חח"ע

4)

$$f(x) = \frac{2x-3}{4x+7} + 2x$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{2x_1-3}{4x_1+7} + 2x_1 = \frac{2x_2-3}{4x_2+7} + 2x_2$$

$$\frac{2x_1 - 3 + 8x_1^2 + 14x_1}{4x_1+7} = \frac{2x_2 - 3 + 8x_2^2 + 14x_2}{4x_2+7}$$

$$(4x_2+7)(16x_1 - 3 + 8x_1^2) = (4x_1+7)(8x_2^2 + 16x_2 - 3)$$

$$32x_2x_1^2 + 64x_1x_2 - 12x_2 + 112x_1 - 21 + 56x_1^2 =$$

$$32x_2x_1^2 + \cancel{64x_1x_2} - 12x_2 + 112x_1 - \cancel{21} + 56x_1^2 = 32x_1x_2^2 + \cancel{64x_1x_2} - 12x_1 + 56x_2^2 + 112x_2 - \cancel{21}$$

$$32x_2x_1^2 - 32x_1x_2^2 - 12x_2 + 12x_1 + 112x_1 - 112x_2 + 56x_1^2 - 56x_2^2 = 0$$

$$32x_1x_2(x_1-x_2) + 56(x_1-x_2)(x_1+x_2) + 112(x_1-x_2) + 12(x_1-x_2) = 0$$

$$(x_1-x_2)(32x_1x_2 + 56(x_1+x_2) + 124) = 0$$

$x = x_2$ או $32x_1x_2 + 56x_1 + 56x_2 + 124 = 0$

$$8x_1(4x_2+7) = -56x_2 - 124$$

לפי ת.ה $x \neq -\frac{7}{4}$

$$x_1 = \frac{-56x_2 - 124}{8(4x_2+7)}$$

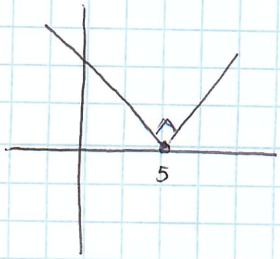
דוגמא נגדית: $0 = x_2$

$$-\frac{31}{14} = \frac{-124}{56} = x_1$$

$$f(0) = -\frac{3}{7} = f\left(-\frac{124}{56}\right)$$

$0 \neq -\frac{3}{7}$ לכן f לא חח"ע.

5) $f(x)=|x-5|$ $\longleftarrow$ $f(x)=\begin{cases} x-5 & x\geq 5 \\ -(x-5) & x<5 \end{cases}$



$f(x_1)=f(x_2)$

$f(9)=|9-5|=4$

$f(1)=|1-5|=4$

$9\neq 1$. לא חח"ע.

6) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 10 \\ 2+5x & x<10 \end{cases}$

$f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל $x_1=x_2$

<u>מקרה א'</u>

$x_1, x_2 \geq 10$

$x_1^2=x_2^2$

$\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}$

$x_1=x_2$

<u>מקרה ב'</u>

$x_1, x_2 < 10$

$2+5x_1=2+5x_2$

$5x_1=5x_2$

$x_1=x_2$

f חח"ע.

<u>הגדרה</u>

$f:A\to B$ פונקציה, נקראית פונקציה על אם התמונה שלה היא B.

<u>הגדרה</u>

$f:A\to B$ פונקציה הפיכה אם f חח"ע ועל ותה"ג של f הוא A.

תרגיל

בדוק אם הפונקציה הפיכה, אם כן מצאו את ההופכית שלה.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 5x-3$

ת"ה כל x.

צ"ל אם f חח"ע ועל.

חח"ע

$f(x_1) = f(x_2)$

$5x_1 - 3 = 5x_2 - 3$

$5x_1 = 5x_2$

$x_1 = x_2$

f חח"ע

על

$y = 5x-3$

$\frac{y+3}{5} = x$

ת"ה כל x.

ולכן התמונה כל x.

f על.

f הפוכה

$g(x) = \frac{x+3}{5}$

2) $f(x) = x^2+x+1$

ת"ה כל x

חח"ע

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 + x_1 + 1 = x_2^2 + x_2 + 1$

$x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2) + (x_1-x_2) = 0$

$(x_1-x_2)(x_1+x_2+1) = 0$

$x_1 = x_2$ או $x_1 + x_2 = -1$

$x_1 = -x_2 - 1$

f לא חח"ע כי $f(0) = f(-1) = 1$

אבל $0 \neq -1$

לכן f לא הפיכה.

3) $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$

ת"ה $x \neq 5$

חח"ע

$\frac{3x_1-2}{x_1-5} = \frac{3x_2-2}{x_2-5}$

$3x_1x_2 - 2x_2 - 15x_1 + 10 = 3x_1x_2 - 2x_1 - 15x_2 + 10$

$13x_2 = 13x_1$

$x_1 = x_2$

f חח"ע.

על

$y = \frac{3x-2}{x-5}$

$y \neq 3$

$y - 3 \neq 0$

$yx - 5y = 3x - 2$

$yx - 3x = 5y - 2$

$x(y-3) = 5y - 2$

$x = \frac{5y-2}{y-3}$

f על.

טענה $x \neq 5$

נניח בשלילה

ש $x = 5$

$5 = \frac{5y-2}{y-3}$

$5y - 15 = 5y - 2$

$-15 \neq -2$

סתירה,

ולכן $x \neq 5$.

f הפיכה

$g(x) = \frac{5x-2}{x-3}$

הגדרה

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית אם $f(x_1)>f(x_2)$ אז $x_1>x_2$ לכל x (עולה)

או $x_1<x_2$ לכל x (יורדת).

תרגיל

$$f(x)=\frac{5x+7}{5x+2} \qquad x\geq 0$$

נתון $f(x_1)>f(x_2)$ צ"ל $x_1>x_2$ או $x_1<x_2$

$$f(x_1)>f(x_2)$$

$$\frac{5x_1+7}{5x_1+2} > \frac{5x_2+7}{5x_2+2}$$

כפל בהצלבה כי $x\geq 0$

$$\cancel{25x_1x_2}+10x_1+35x_2+\cancel{14} > \cancel{25x_1x_2}+10x_2+35x_1+\cancel{14}$$

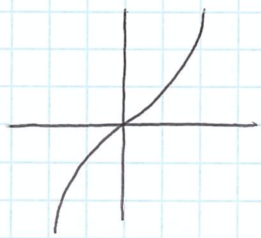
$$10x_1-35x_1>10x_2-35x_2$$

$$-25x_1>-25x_2$$

$x_1<x_2$ f מונוטונית יורדת ממש.

תרגיל

$$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\geq 0 \\ -x^4 & x\leq 0\end{cases}$$



מונוטונית עולה

$x_1>x_2$

$f(x_1)>f(x_2)$

הגדרה

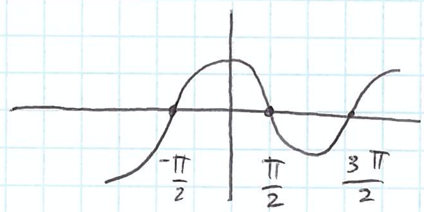
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציה מחזורית אם קיים מספר m כך ש $f(xm)=f(x)$

דוגמא:

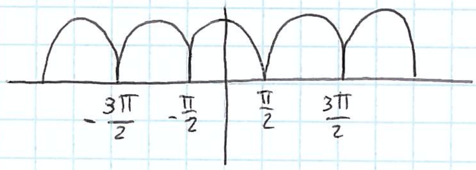
1) $f(x)=\cos x$

$f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos(x)$

מחזורית, 2π רדיאנים.



2) $f(x)=\cos^2 x$



(3

$f(x) = x - [x]$

$f(2.2) = 2.2 - 2 = 0.2$

$f(\pi) = \pi - \pi = 3.14.. - 3 = 0.14..$

28.11.19

אינפי א' - תירגול

חזרה
למשב

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2-9n-3}-\sqrt{16n^2-7n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{16n^2-9n-3}-\sqrt{16n^2-7n+2}\right)\left(\sqrt{16n^2-9n-3}+\sqrt{16n^2-7n+2}\right)}{\left(\sqrt{16n^2-9n-3}+\sqrt{16n^2-7n+2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{16n^2}-9n-3-\cancel{16n^2}+7n-2}{\sqrt{16n^2-9n-3}+\sqrt{16n^2-7n+2}}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

- $$\lim_{n\to\infty}5n\cdot\left(\sqrt{7n^2+8}-\sqrt{7n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n\left(\sqrt{7n^2+8}-\sqrt{7n^2-2}\right)\left(\sqrt{7n^2+8}+\sqrt{7n^2-2}\right)}{\sqrt{7n^2+8}+\sqrt{7n^2-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n(\cancel{7n^2}+8-\cancel{7n^2}+2)}{\sqrt{7n^2+8}+\sqrt{7n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{50n}{\sqrt{7n^2+8}+\sqrt{7n^2-2}}=\frac{50}{\sqrt{7}+\sqrt{7}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-4n}-\sqrt{5n^2-7n}}{3n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+8}\cdot\frac{\left(\sqrt{5n^2-4n}-\sqrt{5n^2-7n}\right)\left(\sqrt{5n^2-4n}+\sqrt{5n^2-7n}\right)}{\sqrt{5n^2-4n}+\sqrt{5n^2-7n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+8}\cdot\frac{\cancel{5n^2}-4n-\cancel{5n^2}+7n}{\sqrt{5n^2-4n}+\sqrt{5n^2-7n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{(3n+8)\left(\sqrt{5n^2-4n}+\sqrt{5n^2-7n}\right)}=0$$

לא
דרך

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^2-4n}-\sqrt{5n^2-7n}}{3n+8}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{3}=0.$$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 9^n+7\cdot 8^{n+1}}{5\cdot 8^n-10\cdot 9^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 9^n+56\cdot 8^n}{5\cdot 8^n-90\cdot 9^n}=\frac{6}{-90}=-\frac{1}{15}.$$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

$$0\le\frac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}^{n\text{ פעמים}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (4)\cdot\ldots\cdot(n-1)(n)}\le \overset{a_1}{2}\cdot\overbrace{1\cdot 1\cdot\ldots}^{a_2-a_{n-1}}\cdot\overset{a_n}{\frac{2}{n}}=\frac{4}{n}\to 0$$

<1 <1

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

$$0\le\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\le\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}=\frac{1}{n}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 \cdot \sin(n^n)}{2n^5+8n-2} = 0$$

חסומה

5.12.19

אינפי א' - תירגול

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot \cancel{2^n}\cdot \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^{n}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{2^n}\cdot \cancel{n!}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

$$\left(\frac{n}{n+1} - 1\right)n = \left(\frac{n-n-1}{n+1}\right)n = \frac{-n}{n+1} = -1$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{8n^2-9n+5}{8n^2-9n+2}\right)^{7n^2-3} = e^{\frac{21}{8}}$

$$\left(\frac{8n^2-9n+5}{8n^2-9n+2} - 1\right)(7n^2-3) = \left(\frac{\cancel{8n^2}-\cancel{9n}+5-\cancel{8n^2}+\cancel{9n}-2}{8n^2-9n-2}\right)(7n^2-3) = \frac{21n^2-9}{8n^2-9n-2} = \frac{21}{8}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+3!+\dots+n!}{n^n} = 0$

סנדוויץ'

$$0 \le a_n \le \frac{n!\cdot n}{n^n} = 0$$

מנה

$$\frac{(n+1)(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n\cdot n!} = \frac{(n+1)(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^n (n+1)\cdot n\cdot n!} = \frac{n+1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} = \infty$

$$\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{3\cancel{(n+1)}(3n+2)(3n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)(n+1)} = \frac{3\cdot 9n^2}{n^2} > 1$$

$(n+1)^3\cdot(n!)^3$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{3n-7\sqrt{n}+5}{4n-8\sqrt{n}+2}\right)}_{\frac{3}{4}}^{\overset{\sqrt{n}+2}{\downarrow\,\infty}} = 0$

19) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right) \underset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}} \underset{t=\frac{1}{x^2}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$

$x\to\infty,\ t\to 0$

חייבים להגיע לצורה של המשפט.

10) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x} \underset{\downarrow \atop \frac{1}{2}^{\infty}}{=} 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

$\frac{a}{\to \infty} = 0$

$\frac{a}{\to 0} = \infty$

11) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x} \underset{\downarrow \atop \frac{1}{2}^{-\infty} \Rightarrow 2^{\infty}}{=} \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

~~13)~~ 12) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+6}\right)^{\frac{1}{x-1}} \underset{\downarrow \atop 1^{\infty}}{=} e^{\frac{4}{5}}$

$L = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+6} - 1\right)\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\cancel{x^2}+2x+2-x^2+2x-6}{x^2-2x+6}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right) =$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x-4}{(x^2-2x+6)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{4\cancel{(x-1)}}{(x^2-2x+6)\cancel{(x-1)}} = \frac{4}{5}$ "

13) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \underset{\downarrow}{=} e$

$\lim\limits_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \quad , t = \frac{2}{x}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{x+4}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\underbrace{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}_{e}\right)^{3x(x+4)} = e^{\frac{3\cancel{x}\overset{x=0}{\downarrow}(x+4)}{\cancel{x}}} = e^{12}$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{10x}-1}{e^{11x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{10 \cdot 11x \cdot e^{10x}-1}{10 \cdot 11x \cdot e^{11x}-1} = \frac{10}{11}$ " $\left(\frac{\frac{e^{10x}-1}{10x}}{\frac{e^{x11}-1}{11x}}\right)$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{11x}-e^{10x}}{20x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{11x}-1-e^{10x}-1}{20x} = \frac{1}{20} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^{11x}-1}{x} - \frac{e^{10x}-1}{x}\right) =$

$= \frac{1}{20} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \left[11 \cdot \underbrace{\frac{e^{11x}-1}{11x}}_{1} - 10 \cdot \underbrace{\frac{e^{10x}-1}{10x}}_{1}\right] = \frac{1}{20} \cdot (11-10) = \frac{1}{20}$ "

17) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \underset{\downarrow \atop \text{coen}}{=} 1$ "

$t = x-1$

$x \to 1, \; t \to 0$

$x = t+1$

18) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+10x)}{e^{11x}+1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+10x)}{x}}{\frac{e^{11x}-1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{10\left[\frac{\ln(1+10x)}{10x}\right] \to 1}{11\left[\frac{e^{11x}-1}{11x}\right] \to 1} = \frac{10}{11}$

12.12.19

אינפי א' - תירגול

גבולות של פונקציות

חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+5x+2} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{2}{3}$

כמו בסדרות כאשר $x\to\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^3+5x+2} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x-1}{3x^2+5x+2} = \infty$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x-3} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x+4 = 7$

5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-2x-15}{x^2-25} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(x-5)(x+3)}{(x+5)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{x+5} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{x^2-3x+2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)(x+\frac{2}{3})}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x+\frac{2}{3})}{x-2} = -5$

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overset{2(x-2)}{2x-4}}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{\sqrt{x+2}-(3x-4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sqrt{3x+3}-3)(\sqrt{3x+3}+3)(\sqrt{x+2}+(3x-4))}{(\sqrt{x+2}-(3x-4))(\sqrt{3x+3}+3)(\sqrt{x+2}+(3x-4))} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(3x-6)(\sqrt{x+2}+(3x-4))}{(x+2)-\underbrace{(3x-4)^2}_{9x^2-24x+16}(\sqrt{3x+3}+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+(3x-4))}{(-9x^2+25x-14)(\sqrt{3x+3}+3)} =$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-25\pm\sqrt{625-504}}{-18} = \dfrac{-25\pm 11}{-18} = \begin{cases} 2 \\ \frac{7}{9} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3(x-2)(\sqrt{x+2}+(3x-4))}{-9(x-2)(x-\frac{7}{9})(\sqrt{3x+3}+3)} = -\dfrac{2}{11}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^x \underset{1^\infty}{=} e^3$

$L = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x-1}-1\right)x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5-2x+1}{2x-1}\right)x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{2x-1} = 3$

19.12.19

אינפי א' - תירגול

• $\lim_{x\to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x} \cdot \underset{\downarrow \atop \text{חסום}}{\sin\frac{1}{x}} = 0$

$x\to\infty,\ t\to 0$

$t=\frac{1}{x}$

• $\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{\uparrow}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

• $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot 2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2(1-\cos^2 x)\cos x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)2\cdot\cos x} = \frac{3}{4}$$

• $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{2+e^{\frac{8-x}{x-3}}} & x>3 \\ \frac{7}{2} & x=3 \\ \frac{3x-2}{(x-3)^2} & x<3 \end{cases}$

$\lim_{x\to 3^+}\frac{7}{2+e^{\frac{8-x}{x-3}}} = \frac{7}{2+e^{\frac{5}{0^+}}} = \frac{7}{2+\infty} = 0$

אי רציפות
מסוג השני

$\lim_{x\to 3^-}\frac{3x-2}{(x-3)^2} = \frac{7}{0^+} = \infty$

26.12.19

אינפי א' - תירגול

משפט ערך הביניים

אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ כך ש $f(a)f(b)<0$ אז קיימת $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

דוגמאות

• $f(x) = x^3-3x^2+4x-5$

$f(0)=-5<0$
$f(3)=7>0$ $\longrightarrow$ לכן קיים $0<c<3$ כך ש $f(c)=0$
ומתקיים: $c^3-3c^2+4c-5=0$

• $f(x)=e^{5x}-7x^2+\sin x$

$f(0)=e^{5\cdot 0}-7\cdot 0^2+\sin 0=1>0$
$f(-1)=e^{-5}-7+\sin(-1)<0$ $\longrightarrow$ לכן קיים $-1<c<0$ כך ש $f(c)=0$
$e^{5c}-7c^2+\sin c=0$

• $f(x)=\frac{1}{x}$

$f(1)=1>0$
$f(-1)=-1<0$ $\longrightarrow$ f לא רציפה בקטע $[-1,1]$ ולכן לא קיים $-1<c<1$ כך ש $f(c)=0$.

נגזרת

הגדרה

תהי f פונקציה רציפה. הנגזרת של f היא:

$$f'(x)=\lim_{a\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

• $f(x)=x^3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x)^3}{h}\overset{\text{נוסחת כפל מקוצר}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\overset{\text{דוגמאות}}{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^3=3x^2+0+0=3x^2$$

- $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2-1} - \sqrt{x^2-1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - \cancel{1} - (x^2 - \cancel{1})}{h(\sqrt{(x+h)^2-1} + \sqrt{x^2-1})} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h(\sqrt{(x+h)^2-1} + \sqrt{x^2-1})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}(\sqrt{(x+h)^2-1} + \sqrt{x^2-1})} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{(x+h)^2} - e^{(x)^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x^2+2xh+h^2} - e^{x^2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{x^2+2xh+h^2-x^2} - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)}{h\,(2x+h)}(2x+h) =$$

1

$$= e^{x^2}(2x)$$

- $f(x) = \ln(x^2+1)$ $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln((x+h)^2+1) - \ln(x^2+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{(x+h)^2+1}{x^2+1}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)}{\cancel{h}\left(\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)}\left(\frac{2xh+h^2}{x^2+1}\right)$$

$h(2x+h$

1

$$= 1 \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

2.1.20

אינפי א' - תירגול

• $y = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{x^2+3x}{x^2-5x}}\right) = \ln\left(\frac{x^2+3x}{x^2-5x}\right)^{\frac{1}{5}} \underset{\downarrow \circledast}{=} \frac{1}{5}\left[\ln(x^2+3x) - \ln(x^2-5x)\right]$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{x^2+3x}{x^2-5x}}} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{x^2+3x}{x^2-5x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{(2x+3)(x^2-5x) - (2x-5)(x^2+3x)}{(x^2-5x)^2}\right)$$

$$\circledast \quad y' = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x^2+3x} \cdot (2x+3) - \frac{1}{x^2-5x} \cdot (2x-5)\right]$$

• $y = \frac{(x^2-5x)(x^3+7x)}{x^9-8x+9} = \frac{x^5+7x^3-5x^4-35x^2}{x^9-8x+9}$

• $y = \frac{e^{3x}(5x^2-7x)}{\sqrt{x^4+9x^3}}$

$a^b = x \iff \log_a x = b \quad , x>0$

$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

$$y' = \frac{(3e^{3x} \cdot (5x^2-7x) + (10x-7)e^{3x})\sqrt{x^4+9x^3} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x^4+9x^3}}(4x^3+27x^2)\, e^{3x}(5x^2-7x)\right)}{\left(\sqrt{x^4+9x^3}\right)^2}$$

חוקי לוגים

$a^b = x \iff \log_a x = b \quad , x>0$ $\qquad$ $e^b = x \iff \ln x = b \quad x>0$

$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$ $\qquad$ $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$

$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ $\qquad$ $\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$\log_a(x^n) = n \log_a x$ $\qquad$ $\ln(x^n) = n \ln x$

$a^{\log_a x} = x$ $\qquad$ $e^{\ln x} = x$

דוגמא

$y = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x}$

$y' = \underbrace{e^{x \cdot \ln x}}_{x^x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$

- $y = x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{(\ln x)^2}$

  $y' = e^{\ln^2 x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$

- $y = (\ln x)^x = e^{\ln(\ln x)^x} = e^{x \cdot \ln x(\ln x)}$

  $y' = e^{x \ln x(\ln x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\right) = (\ln x)^x \cdot \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$

- $y = x^{\cos x} = e^{\ln(x)^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln x}$

  $y' = e^{\ln x \cdot \cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$

- $y = (\cos x)^x = e^{\ln(\cos x)^x} = e^{x \ln \cos x}$

  $y' = e^{x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \left(\ln(\cos x) + x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right) = (\cos x)^x \cdot \left(\ln(\cos x) - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot x\right)$

חקירת פונקציות

- $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

  ת.ה כל x

$x=0$	$y=0$
$y=0$	$0 = x(x^2-6x+9)$
	$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$
$(0,0)$	$(3,0)$

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3,\quad \frac{4-2}{2} = 1$

$(3,0)$ min

$(1,4)$ max

x	0	1	2	3	4
y'	+ ↗		− ↘		+ ↗

ירידה עליה

$y'' = 6x - 12$

$0 = 6x - 12$

$6x = 12$

$x = 2$

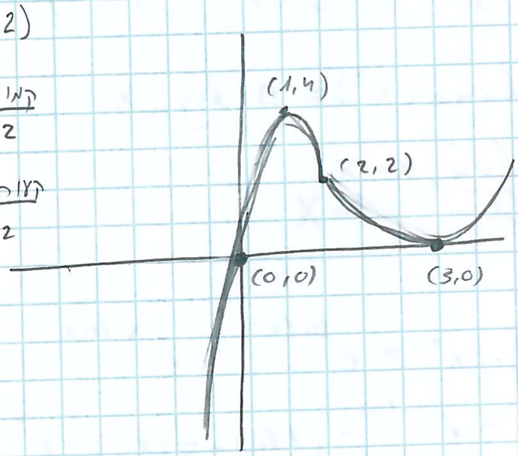
$(2,2)$

x	0	2	3
y''	−		+

פיתול

קמורה $x<2$

קעורה $x>2$



אינפי א' - תירגול

• $y = \frac{-x^2-3}{x+1}$

x	-2	-1	0
$f''(x)$	$+$ $\cup$		$-$ $\cap$

ת"ה $\quad x \neq -1$

קמור $\quad -1 > x$

קעור $\quad x > -1$

חיתוך צירים

$x=0$
$y=-3$
$(0,-3)$

$y=0$
$0=-x^2-3$
$x^2=-3$
X

אנכית $\quad \lim_{x\to -1} \frac{-x^2-3}{x+1} = \pm\infty$ $\quad \neq \frac{0}{0}$

עלייה וירידה

$$f'(x) = \frac{(-2x)(x+1)-(-x^2-3)(1)}{(x+1)^2}$$

משופע $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2-3}{x(x+1)}\right) = -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2-3}{x+1}+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2-3+x^2+x}{x+1} = 1$$

$y=1$

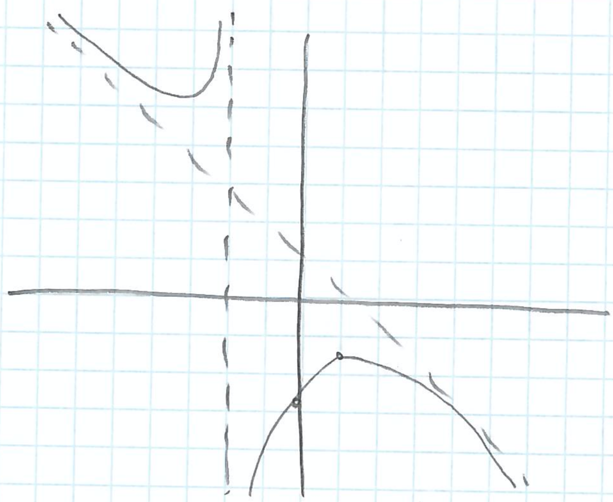
$0 = -2x^2-2x+x^2+3$

$0 = -x^2-2x+3$

$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2\pm 4}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

x	-5	-3	-2	$\boxed{-1}$	0	1	2
$f'(x)$	$-$ ↘		$+$ ↗		$+$ ↗		$-$ ↘
		min				max	

min $(-3,6)$ $\quad$ max $(1,-2)$



עלייה $\quad -3<x<-1,\ -1<x<1$

ירידה $\quad x<-3,\ x>1$

$$f''(x) = \frac{\overset{-2(x+1)}{(-2x-2)}(x+1)^2 - (-x^2-2x+3)(2(x+1))}{(x+1)^4}$$

$0 = 2(x+1)\left[-(x+1)-(-x^2-2x+3)\right]$

$0 = \frac{-8(x+1)}{(x+1)^4}$

$x=-1$

$$\cdot\ y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$$

ת"ה $\quad x\neq 0$

חיתוך

$x=0$	$y=0$	
$y=-1$	$0=(x-1)^3$	
$(0,-1)$	$x=1$	$(0,1)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^3}{x^2}=\pm\infty \qquad \frac{\neq 0}{0} \qquad \boxed{x=0}$$

אנכית

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x^3}=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{x^3}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{x^2}-x\right)=\frac{\cancel{x^3}-3x^2+3x-1-\cancel{x^3}}{x^2}=-3$$

$$\boxed{y=x-3}$$

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2(x^2)-(2x)(x-1)^3}{x^2}$$

$$0=x(x-1)^2\left[\overset{3x-2x+1}{3x-2(x-1)}\right]$$

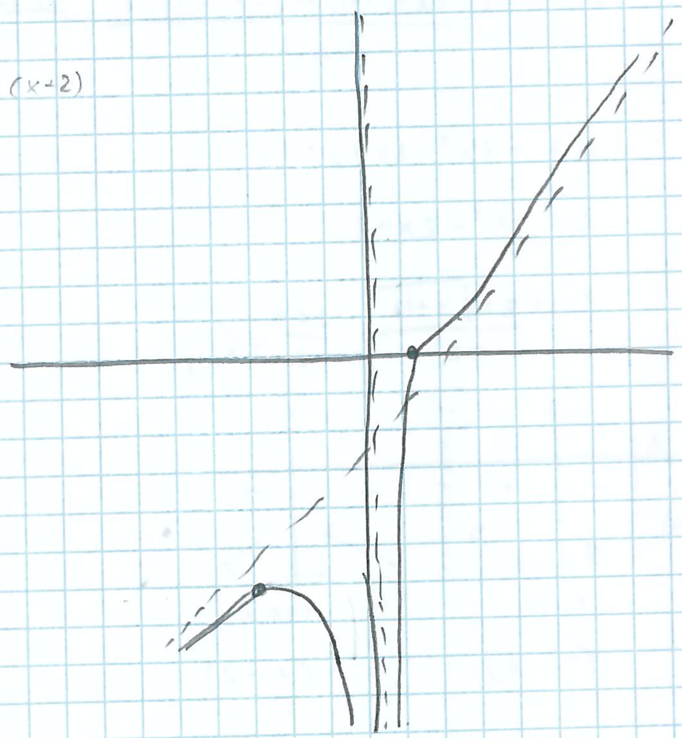
$$0=x(x-1)^2(x+2) \qquad (x^2-2x+1)x(x+2)$$

$x=0 \qquad x=1 \qquad x=-2$

x	-3	-2	-1	$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	$+$ ↗		$-$ ↘		$+$ ↗		$+$ ↗

max

$(-2,-6.75)$



$$f''(x)=\frac{x(x-1)^2(x+2)}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{\left[2(x-1)(x+2)+1(x-1)^2\right]x^3-3x^2(x-1)^2(x+2)}{x^6}$$

$$0=x^2(x-1)\left[2x(x+2)+x-3(x-1)(x+2)\right]$$

$$0=\frac{x^2(x-1)\left[-x^2+x+9\right]}{x^6}$$

$x=0 \qquad x=1 \qquad x=3.54 \qquad x=-2.54$

לא צריך בבגרות.

x	-3	-2.54	-1	$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3.54	5
$f''(x)$	$-$ ∩		$+$ ∪		$-$ ∩		$+$ ∪		$-$ ∩

$(-2.54,-6.87) \qquad (3.54, 1.3$

$(1,0)$